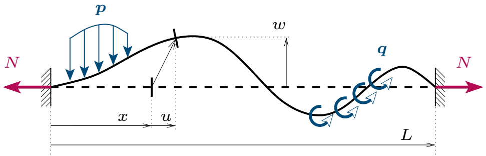
Poutre précontrainte avec N.L. géométriques



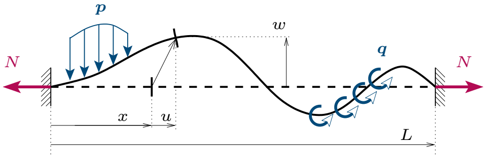
▷ **Inconnues**

- Déplacement transverse w,
- Effort normal N.

▷ **Hypothèses**

- Hyp. d'Euler-Bernoulli
- N.L. géométrique "von Kármán"
- Inertie axiale négligée
- Blocages axiaux: $u(0) = u(L) = 0$

Poutre précontrainte avec N.L. géométriques



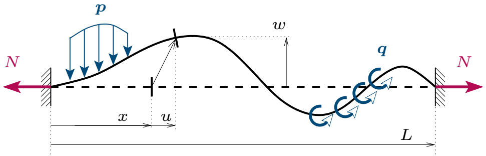
▷ **Inconnues**

- Déplacement transverse w,
- Effort normal N.

▷ **Équations locales**

$$\begin{cases} \rho S\ddot{w} + EIw_{,xxxx} - \left(Nw_{,x}\right)_{,x} = p - q_{,x}, \\ N = N_0 + \dfrac{ES}{2L}\displaystyle\int_0^L w_{,x}^2 \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

Poutre précontrainte avec N.L. géométriques



▷ **Inconnues**

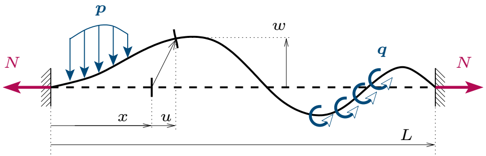
- Déplacement transverse w,
- Effort normal N.

▷ **Équations locales**

$$\begin{cases} \rho S \ddot{w} + EI w_{,xxxx} - \left(N w_{,x}\right)_{,x} = p - q_{,x}, \\ N = N_0 + \dfrac{ES}{2L} \displaystyle\int_0^L w_{,x}^2 \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire non-précontraine

Poutre précontrainte avec N.L. géométriques



▷ **Inconnues**

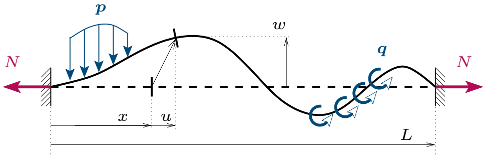
- Déplacement transverse w,
- Effort normal N.

▷ **Équations locales**

$$\begin{cases} \rho S \ddot{w} + EIw_{,xxxx} - \left(Nw_{,x}\right)_{,x} = p - q_{,x}, \\ N = N_0 + \dfrac{ES}{2L} \displaystyle\int_0^L w_{,x}^2 \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire non-précontraine
- Couplage non-lineaire -N.L. (géométriques)

Poutre précontrainte avec N.L. géométriques

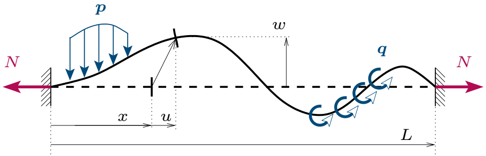


- ▷ **Inconnues**
  - Déplacement transverse w,
  - Effort normal N.
- ▷ **Équations locales**

$$\begin{cases} \rho S\ddot{w} + EIw_{,xxxx} - \left(Nw_{,x}\right)_{,x} = p - q_{,x}, \\ N = N_0 + \dfrac{ES}{2L}\displaystyle\int_0^L w_{,x}^2 \,\mathrm{d}x \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire non-précontraine
- Couplage non-lineaire -N.L. (géométriques)
- Précontrainte

Poutre précontrainte avec N.L. géométriques



▷ **Inconnues**

- Déplacement transverse w,
- Effort normal N.

▷ **Équations locales**

$$\begin{cases} \rho S \ddot{w} + EI w_{,xxxx} - \left(N w_{,x}\right)_{,x} = p - q_{,x}, \\ N = N_0 + \dfrac{ES}{2L} \displaystyle\int_0^L w_{,x}^2 \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire non-précontraine
- Couplage non-lineaire -N.L. (géométriques)
- Précontrainte
- Forçage extérieur

Méthode de résolution

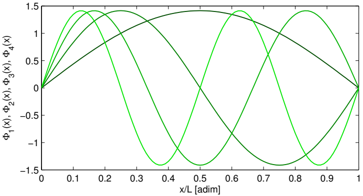
▷ **Adimensionnement**

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{w} + w_{,xxxx} - \varepsilon N w_{,xx} = p, \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 w_{,x}^2 \, \mathrm{d}x, \end{cases}$$

▷ **Décomposition modale**

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

⇝ Φ_k: déformées modale de la poutre **non précontrainte**



Problème discrétisé

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

Problème discrétisé

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire $\rightsquigarrow$ Oscillateurs découplés

Problème discrétisé

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire $\rightsquigarrow$ Oscillateurs découplés
- Non-linéarités géométriques

  $\rightsquigarrow$ Formulation (N, q): termes quadratiques

  $\rightsquigarrow$ Formulation (q): termes cubiques

Problème discrétisé

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1,\dots K \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} \alpha_j^i q_i q_j, \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire ⇝ Oscillateurs découplés
- Non-linéarités géométriques

  ⇝ Formulation (N, q): termes quadratiques

  ⇝ Formulation (q): termes cubiques
- Précontrainte

Problème discrétisé

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_k(x)\, q_k(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

- Terme de poutre linéaire $\rightsquigarrow$ Oscillateurs découplés
- Non-linéarités géométriques

  $\rightsquigarrow$ Formulation (N, q): termes quadratiques

  $\rightsquigarrow$ Formulation (q): termes cubiques
- Précontrainte
- Forçage extérieur

Flambage

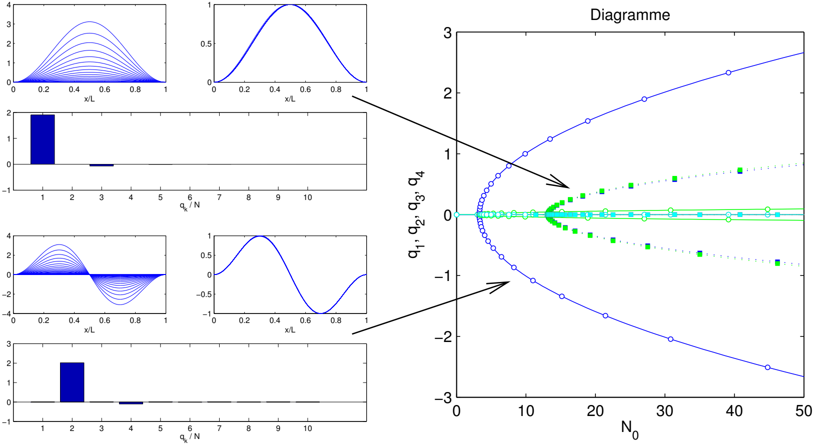
▷ **Système algébrique non-linéaire**

$$\begin{cases} \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = Q_k, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = N_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_{ij} q_i q_j. \end{cases}$$

▷ **Formulation MAN**

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}, N_0) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{U} = (q_1, \dots, q_K, N)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{N}^{K+1}.$$

Flambage (poutre bi-encastrée)



⇝ Démo. MANLab

Vibrations non-linéaires forcée

▷ **Forçage sinusoïdal**

$$\begin{cases} \ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i = \tilde{Q}_k \cos \omega t, \quad \forall k = 1, \dots K \\ N = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

▷ **Solutions périodiques**

$$\begin{cases} q_k(t) = q_k^{(0)} + \sum_{h=1}^{H} \left(q_k^{(hc)}(x) \cos h\omega t + q_k^{(hs)}(x) \sin h\omega t \right), \\ N(t) = N^{(0)} + \sum_{h=1}^{H} \left(N^{(hc)}(x) \cos h\omega t + N^{(hs)}(x) \sin h\omega t \right). \end{cases}$$

MAN

▷ **Écriture au premier ordre + ajout équations algébriques**

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k, \\ \dot{v}_k = \tilde{Q}_k \cos \omega t - 2\xi_k \omega_k v_k - \omega_k^2 q_k - \varepsilon N \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i, \quad \forall k = 1, \dots K \\ \; 0 = N - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

MAN

▷ **Écriture au premier ordre + ajout équations algébriques**

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k, \\ \dot{v}_k = \tilde{Q}_k \cos \omega t - 2\xi_k \omega_k v_k - \omega_k^2 q_k - \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i, \quad \forall k = 1, \dots K \\ 0 = N - \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

Termes Constants,

MAN

- ▷ **Écriture au premier ordre + ajout équations algébriques**

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k, \\ \dot{v}_k = \tilde{Q}_k \cos \omega t - 2\xi_k \omega_k v_k - \omega_k^2 q_k - \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i, \quad \forall k = 1, \dots K \\ 0 = N - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

Termes Constants, Linéaires,

MAN

▷ **Écriture au premier ordre + ajout équations algébriques**

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k, \\ \dot{v}_k = \tilde{Q}_k \cos \omega t - 2\xi_k \omega_k v_k - \omega_k^2 q_k - \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i, \quad \forall k = 1, \dots K \\ 0 = N - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

Termes Constants, Linéaires, Quadratiques

MAN

▷ **Écriture au premier ordre + ajout équations algébriques**

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k, \\ \dot{v}_k = \tilde{Q}_k \cos \omega t - 2\xi_k \omega_k v_k - \omega_k^2 q_k - \varepsilon N \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^k q_i, \quad \forall k = 1, \dots K \\ 0 = N - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^j q_i q_j, \end{cases}$$

Termes Constants, Linéaires, Quadratiques

▷ **Formulation MANLab** [Cochelin, Vergez JSV 2009]

$$\omega \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}(\omega) + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{u} = (q_1, \dots, q_K, v_1, \dots, v_K, N)^T$$

MAN + Équilibrage harmonique

▷ **Équilibrage harmonique** (Automatique [Cochelin, Vergez JSV 2009])

$$\omega \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}(\omega) + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

$$\boldsymbol{u} = (q_1, \ldots, q_K, v_1, \ldots, v_K, N)^T$$

$$\Downarrow$$

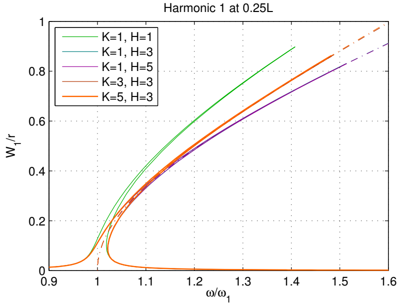
$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}, \omega) = \boldsymbol{0},$$

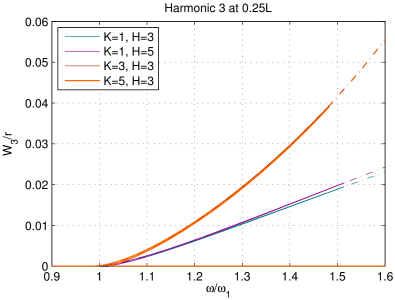
$$\begin{aligned}\boldsymbol{U} = \Big(& q_1^{(0)}, \ldots, q_K^{(0)}, v_1^{(0)}, \ldots, v_K^{(0)}, N^{(0)}, \ldots \\ & q_1^{(hc)}, \ldots, q_K^{(hc)}, v_1^{(hc)}, \ldots, v_K^{(hc)}, N^{(hc)}, \\ & q_1^{(hs)}, \ldots, q_K^{(hs)}, v_1^{(hs)}, \ldots, v_K^{(hs)}, N^{(hs)}, \ldots \Big)^T.\end{aligned}$$

▷ **Inconnues du problème:**

- Les coefficients de Fourier des q_k, v_k et N,
- La pulsation d'excitation ω.

Convergence - résonance du mode 1





Influence de l'amortissement - résonance du mode 1